Тема "Симетрични и ермитови матрици и оператори." по Алгебра 1.

Камен Димитров Младенов, Група 6

05 Февруари 2022

По определение, матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ е симетрична ако $\overline{A}^t = A$. Също, матрица $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ е ермитова ако $\overline{A}^t = A$.

Твърдим, че множествата $M^{sym}_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A^t = A\}$ и $M^{Herm}_{n\times n}(\mathbb{C}) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid \overline{A}^t = A\}$ са линейни пространства над полето на реалните числа.

Доказателство: За произволни $M, N \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$: $\overline{(M+N)}_{i,j} = \overline{(M+N)_{i,j}} = \overline{(M_{i,j}+N_{i,j})} = \overline{M_{i,j}} + \overline{N_{i,j}} = \overline{(M)}_{i,j} + \overline{(N)}_{i,j} = (\overline{M}+\overline{N})_{i,j} \quad \forall i \in \{1,...,m\},\ \forall j \in \{1,...,n\}$ (защото $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ за произволни $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$). □

За произволни $M \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ и $z \in \mathbb{C}$: $\overline{(zM)}_{i,j} = \overline{(zM)_{i,j}} = \overline{(zM_{i,j})} = \overline{z} \cdot \overline{(M_{i,j})} = \overline{z} \cdot \overline{(M)}_{i,j} = (\overline{z} \cdot \overline{M})_{i,j} \quad \forall i \in \{1,...,m\},\ \forall j \in \{1,...,n\}$ (защото $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$ за произволни $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$).

Следователно, ако $\overline{A}^t = A$ и $\overline{B}^t = B$, то $\overline{(A+B)}^t = \overline{A}^t + \overline{B}^t = A + B$ и за произволно $\lambda \in \mathbb{R}$ $\overline{(\lambda A)}^t = \overline{\lambda} \cdot \overline{A}^t = \lambda A$. То тогава $A + B$ и λA са симетрични/ермитови матрици и множеството на симетричните/ермитовите матрици е линейно пространство над $\mathbb{R}$. □

Твърдим, че за обратима симетрична/ермитова матрица, обратната ѝ матрица също е симетрична/ермитова.

Доказателство: По определение, $AA^{-1} = E_n$, то тогава $E_n = \overline{E_n}^t = \overline{(AA^{-1})}^t = (\overline{A} \cdot \overline{A^{-1}})^t = \overline{A^{-1}}^t \cdot \overline{A}^t = \overline{A^{-1}}^t \cdot A$ (показахме в доказателството на минала теорема, че $\overline{MN} = \overline{M} \cdot \overline{N}, \quad M, N \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$). Имайки предвид, че $Z = A^{-1}$ е единственото решение на $ZA = E_n$ (по определение), то $\overline{A^{-1}}^t = A^{-1}$ и A^{-1} е обратима. □

Твърдим, че за симетрични $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ или ермитови $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ матрици, при които $AB = BA$, AB е симетрична/ермитова матрица.

Доказателство: $\overline{(AB)}^t = (\overline{A} \cdot \overline{B})^t = \overline{B}^t \cdot \overline{A}^t = BA = AB$ □

По определение, за евклидово (или унитарно) пространство V, линеен оператор $\varphi : V \to V$ се нарича симетричен (или ермитов) ако $\langle \varphi(u), v\rangle = \langle u, \varphi(v)\rangle,\ \forall u, v \in V$.

Твърдим, че за n-мерно евклидово или унитарно пространство V над поле F с линеен оператор $\varphi : V \to V$, следните условия са еквивалентни:

1) φ е симетричен/ермитов оператор

2) за произволен базис $a_1, ..., a_n$ на V е изпълнено $\langle \varphi(a_i), a_j\rangle = \langle a_i, \varphi(a_j)\rangle \quad \forall i, j \in \{1,...,n\}$

3) за произволен ортонормиран базис $b_1, ..., b_n$ на V е изпълнено $\langle \varphi(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, \varphi(b_j)\rangle \quad \forall i, j \in \{1,...,n\}$

4) спрямо ортонормиран базис $b_1, ..., b_n$ на V, матрицата на φ е симетрична/ермитова

Доказателство: 1) ⇒ 2) ⇒ 3) Очевидно

3) ⇔ 4) Нека $A = (A_{ij})^n_{i,j=1} \in M_{n\times n}(F)$ да бъде матрицата на φ спрямо ортонормирания базис $b_1, ..., b_n$. Координатите на $\varphi(b_i)$ са разположени в i-тия стълб, тогава $\langle \varphi(b_i), b_j\rangle = \left\langle \sum\limits_{s=1}^{n} A_{si} b_s\ ,\ b_j \right\rangle = \sum\limits_{s=1}^{n} A_{si}\langle b_s, b_j\rangle = A_{ji}\langle b_j, b_j\rangle = A_{ji}$ и $\langle b_i, \varphi(b_j)\rangle = \left\langle b_i\ ,\ \sum\limits_{s=1}^{n} A_{sj} b_s \right\rangle = \sum\limits_{s=1}^{n} \overline{A_{sj}}\langle b_i, b_s\rangle = \overline{A_{ij}}\langle b_i, b_i\rangle = \overline{A_{ij}}.$

Тоест 3) е еквивалентно на $A_{ij} = \langle \varphi(b_i), b_j \rangle = \langle b_i, \varphi(b_j) \rangle = \overline{A_{ij}} \quad \forall i, j \in \{1, ..., n\}$. Имайки предвид, че $(\overline{A}^t)_{ji} = (\overline{A})_i j = \overline{A_{ij}}$, то $A_{ji} = (\overline{A}^t)_{ji}$, което се свежда до $A = \overline{A}^t$.

3) $\Rightarrow$ 1) По предположение, за произволни вектори $u = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i \in V$ и $v = \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \in V$ е изпълнено

$$\langle \varphi(u), v \rangle = \left\langle \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} x_i b_i\right), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(b_i), \sum_{j=1}^{n} y_j b_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle \varphi(b_i), b_j \rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \overline{y_j} \langle b_i, \varphi(b_j) \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \sum_{j=1}^{n} y_j \varphi(b_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i b_i, \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} y_j b_j\right) \right\rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle$$

Следователно φ е симетричен/ермитов оператор. □

Твърдим, че при ненулево крайномерно евклидово/унитарно пространство V, за симетричен/ермитов оператор $\varphi : V \to V$, характеристичните му корени са реални числа.

Доказателство: Първо ще проверим, че е вярно за произволна собствена стойност. Избираме произволен собствен вектор $v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}_V\}$ с произволна собствена стойност $\lambda \in \mathbb{C}$. Тогава $\overline{\lambda}||v||^2 = \langle v, \lambda v \rangle = \langle v, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(v), v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda ||v||^2$. Следователно $(\overline{\lambda} - \lambda)||v||^2 = \overline{\lambda}||v||^2 - \lambda||v||^2 = 0$. Понеже $||v||^2 \in \mathbb{R}^{>0}$, то $\overline{\lambda} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Разглеждаме ермитов оператор $\varphi : V \to V$. Сега ще покажем, че е вярно за всички собствени стойности. По определение, $f_\varphi(x) \in \mathbb{C}[x] \setminus \mathbb{C}$ има комплексни коефициенти и съгласно основната теорема на алгебрата, всички корени на $f_\varphi(x) = 0$ са комплексни числа. Нека A да бъде матрицата на φ спрямо произволен ортонормиран базис. Всички характеристични корени на φ са собствени стойности (твърдение) и от първата стъпка, следва че корените са реални числа.

Всяка матрица на ермитов оператор се реализира спрямо ортонормиран базис. Тоест характеристичните корени на φ съвпадат с тези на A и характеристичните корени на ермитова матрица са реални числа.

Всяка симетрична матрица е и ермитова, понеже $M_{n\times n}^{sym}(\mathbb{R}) \subset M_{n\times n}^{Herm}(\mathbb{C})$ и затова характеристичните корени на симетрични матрици са реални числа. □

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V със симетричен или ермитов оператор $\varphi : V \to V$, собствените му вектори са ортогонални помежду си.

Доказателство: Прилагаме определението за симетричност/ермитовост на φ към собствените вектори $u, v \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$: $\mu\langle u, v \rangle = \overline{\mu}\langle u, v \rangle = \langle u, \mu v \rangle = \langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = \langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$. Следователно $(\lambda - \mu)\langle u, v \rangle = \lambda\langle u, v \rangle - \mu\langle u, v \rangle = 0$, където $\lambda \neq \mu \implies \langle u, v \rangle = 0$ и u, v са ортогонални (помежду си). □

Твърдим, че за евклидово или унитарно пространство V, симетричен/ермитов оператор $\varphi : V \to V$ и φ-инвариантно подпространство $U \subset V$, ортогоналното допълнение $U^\perp$ е φ-инвариантно.

Доказателство: За произволни $u \in U, v \in U^\perp$: $\langle u, \varphi(v) \rangle = \langle \varphi(u), v \rangle = 0$, имайки предвид че $\varphi(u) \in U$. Следователно $\varphi(v) \in U^\perp$ и $U^\perp$ е φ инвариантно. □

Твърдим, че в n-мерно евклидово или унитарно пространство V и произволен симетричен/ермитов оператор $\varphi : V \to V$ съществува ортонормиран базис $e = (e_1, ..., e_n)$ на V, за който матрицата на φ е диагонална.

Доказателство: Ще докажем твърдение с индукция по $n = \dim V$.

База: $n = 1$ Няма какво да се доказва

Индукционна стъпка: Ако φ е ермитов оператор, то съществува собствен вектор по теорема. Ако φ е симетричен оператор, то всички характеристични корени са реални числа и тогава са и собствени стойности, следователно съществува собствен вектор отговарящ на някоя собствена стойност.

Нека този вектор да е $v_1 \in V \setminus \{\overrightarrow{\mathcal{O}}\}$ със собствена стойност $\lambda_1 \in \mathbb{R}$. $e_1 = \frac{v_1}{||v_1||} \in l(v_1)$ и забелязваме, че $U := l(e_1) = l(v_1)$. От индукционното предположение, съществува ортонормиран базис $e_2, ..., e_n$

на $U^\perp$ за който матрицата на $\varphi : U^\perp \to U^\perp$ е диагонална. Тогава $e_1, ..., e_n$ е ортонормиран базис на $V = U \oplus U^\perp$ и матрицата на $\varphi : V = U \oplus U^\perp \to V = U \oplus U^\perp$ е диагонална. $\square$

Твърдим, че за симетрична или ермитова матрица A съществува ортогонална матрица T, такава че $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$ е диагонална.

Доказателство: Разглеждаме линеен оператор $\varphi : V \to V$ с матрица A спрямо ортонормиран базис f на n-мерно евклидово/унитарно пространство V. От миналото твърдение знаем, че операторът на φ е симетричен/ермитов и съществува ортонормиран базис e за който матрицата D на φ е диагонална. Матрицата на прехода T от f към e е ортогонална/унитарна и $D = T^{-1}AT = \overline{T}^t AT$. $\square$